|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Министерство науки и высшего образования  Российской Федерации | | |
| Федеральное государственное бюджетное  образовательное учреждение высшего образования | | |
| «Новосибирский государственный технический университет» | | |
|  | | |
| Кафедра теоретической и прикладной информатики | | |
|  | | |
| Лабораторная работа № 2 | | |
| по дисциплине «Методы оптимизации» | | |
|  | | |
| **Методы спуска** | | |
|  | | |
|  | Факультет: | ПМИ |
| Группа: | ПМИ-72 |
| Вариант: | 1 |
| Студент: | Сычев Егор |
|  |  |
|  |  |
| Преподаватель: | Постовалов Сергей Николаевич |
|  |  |
|  | | |
| Новосибирск | | |
| 2020 | | |

1. **Цель работы**

Ознакомиться с методами поиска минимума функции n переменных в оптимизационных задачах без ограничений.

1. **Задания**

|  |  |
| --- | --- |
| № | Вид работы |
|  | Реализовать **два метода** поиска экстремума функции (разного порядка) Включить в реализуемый алгоритм собственную процедуру, реализующую одномерный поиск по направлению. Методы поиска для самостоятельной реализации выбираются студентом в зависимости от уровня сложности. Выбранные методы должны иметь разный порядок (например, метод Гаусса (нулевого порядка) - 1 балл и метод Ньютона (второго порядка) - 3 балла, итого 9 баллов). |
|  | С использованием разработанного программного обеспечения исследовать алгоритмы на квадратичной функции , функции Розенброка  и на заданной в соответствии с вариантом тестовой функции, осуществляя спуск из различных исходных точек (не менее двух). Исследовать сходимость алгоритма, фиксируя точность определения минимума/максимума, количество итераций метода и количество вычислений функции в зависимости от задаваемой точности поиска. Результатом выполнения данного пункта должны быть выводы об объёме вычислений в зависимости от задаваемой точности и начального приближения. |

Найти максимум заданной функции:

1. **Ход работы**
   1. **Метод сопряженных градиентов в модификации Флетчера-Ривса**
      1. **Квадратичная функция**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| epsilon | function calls | iterations | x | y | f(x, y) |
| 0,001 | 93 | 6 | 1,001 | 1,001 | 0 |
| 0,0001 | 139 | 5 | 1 | 1 | 0 |
| 0,00001 | 387 | 11 | 1 | 1 | 0 |
| 0,000001 | 296 | 7 | 1 | 1 | 0 |
| 0,0000001 | 369 | 7 | 1 | 1 | 0 |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| epsilon | function calls | iterations | x | y | f(x, y) |
| 0,001 | 108 | 6 | 1 | 1 | 0 |
| 0,0001 | 139 | 5 | 1,0001 | 1,0001 | 0 |
| 0,00001 | 249 | 7 | 1 | 1 | 0 |
| 0,000001 | 216 | 5 | 1 | 1 | 0 |
| 0,0000001 | 153 | 3 | 1 | 1 | 0 |

* + 1. **Функция Розенброка**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| epsilon | function calls | iterations | x | y | f(x, y) |
| 0,001 | 649 | 40 | 1 | 1 | 0 |
| 0,0001 | 1433 | 59 | 1 | 1 | 0 |
| 0,00001 | 1147 | 33 | 1 | 1 | 0 |
| 0,000001 | 1436 | 33 | 0,999999 | 0,999998 | 0 |
| 0,0000001 | 1382 | 27 | 0,9999999 | 0,9999998 | 0 |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| epsilon | function calls | iterations | x | y | f(x, y) |
| 0,001 | 1832 | 133 | 1 | 1,001 | 0 |
| 0,0001 | 1441 | 68 | 1 | 1 | 0 |
| 0,00001 | 2377 | 79 | 1,00001 | 1,00001 | 0 |
| 0,000001 | 1439 | 35 | 1 | 0,999999 | 0 |
| 0,0000001 | 2527 | 51 | 0,9999999 | 0,9999998 | 0 |

* + 1. **Функция из варианта (поиск максимума)**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| epsilon | function calls | iterations | x | y | f(x, y) |
| 0,001 | 145 | 4 | 1,263 | 1,333 | 3,169 |
| 0,0001 | 222 | 5 | 1,2625 | 1,3343 | 3,1693 |
| 0,00001 | 319 | 6 | 1,26303 | 1,3344 | 3,16932 |
| 0,000001 | 366 | 6 | 1,263035 | 1,334396 | 3,169317 |
| 0,0000001 | 414 | 6 | 1,263035 | 1,3343957 | 3,1693172 |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| epsilon | function calls | iterations | x | y | f(x, y) |
| 0,001 | 131 | 4 | 1,965 | 2,882 | 3,035 |
| 0,0001 | 264 | 6 | 1,9672 | 2,8861 | 3,0351 |
| 0,00001 | 311 | 6 | 1,96715 | 2,88611 | 3,03506 |
| 0,000001 | 359 | 6 | 1,967151 | 2,886115 | 3,035064 |
| 0,0000001 | 406 | 6 | 1,9671515 | 2,8861149 | 3,0350635 |

* 1. **Метод Бройдена (переменной метрики)**
     1. **Квадратичная функция**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| epsilon | function calls | iterations | x | y | f(x, y) |
| 0,001 | 57 | 3 | 1 | 1 | 0 |
| 0,0001 | 80 | 3 | 1 | 1 | 0 |
| 0,00001 | 104 | 3 | 1 | 1 | 0 |
| 0,000001 | 91 | 2 | 1 | 1 | 0 |
| 0,0000001 | 153 | 3 | 1 | 1 | 0 |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| epsilon | function calls | iterations | x | y | f(x, y) |
| 0,001 | 106 | 4 | 1 | 1 | 0 |
| 0,0001 | 121 | 4 | 1 | 1 | 0 |
| 0,00001 | 155 | 4 | 1 | 1 | 0 |
| 0,000001 | 184 | 4 | 1 | 1 | 0 |
| 0,0000001 | 220 | 4 | 1 | 1 | 0 |

* + 1. **Функция Розенброка**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| epsilon | function calls | iterations | x | y | f(x, y) |
| 0,001 | 487 | 25 | 1 | 1 | 0 |
| 0,0001 | 680 | 25 | 1 | 1 | 0 |
| 0,00001 | 887 | 25 | 1 | 1 | 0 |
| 0,000001 | 1080 | 25 | 1 | 1 | 0 |
| 0,0000001 | 1281 | 25 | 1 | 1 | 0 |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| epsilon | function calls | iterations | x | y | f(x, y) |
| 0,001 | 1329 | 69 | 1 | 1 | 0 |
| 0,0001 | 873 | 33 | 1 | 1 | 0 |
| 0,00001 | 1058 | 31 | 1 | 1 | 0 |
| 0,000001 | 1381 | 33 | 1 | 1 | 0 |
| 0,0000001 | 2436 | 49 | 1 | 1 | 0 |

* + 1. **Функция из варианта (поиск максимума)**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| epsilon | function calls | iterations | x | y | f(x, y) |
| 0,001 | 145 | 4 | 1,263 | 1,333 | 3,169 |
| 0,0001 | 222 | 5 | 1,2625 | 1,3343 | 3,1693 |
| 0,00001 | 319 | 6 | 1,26304 | 1,3344 | 3,16932 |
| 0,000001 | 366 | 6 | 1,263035 | 1,334396 | 3,169317 |
| 0,0000001 | 414 | 6 | 1,263035 | 1,3343959 | 3,1693172 |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| epsilon | function calls | iterations | x | y | f(x, y) |
| 0,001 | 131 | 4 | 1,963 | 2,878 | 3,035 |
| 0,0001 | 264 | 6 | 1,9672 | 2,8861 | 3,0351 |
| 0,00001 | 311 | 6 | 1,96715 | 2,88612 | 3,03506 |
| 0,000001 | 359 | 6 | 1,967151 | 2,886115 | 3,035064 |
| 0,0000001 | 406 | 6 | 1,967152 | 2,886115 | 3,035064 |

1. **Анализ сходимости**
   1. **Метод сопряженных градиентов в модификации Флетчера-Ривса**
      1. **Квадратичная функция**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| i | xi | yi | f(x, y) | si1 | si2 | lambdai | |yi-y(i-1)| | |yi-y(i-1)| | |fi-f(i-1)| | angle((xi, yi), si)" | gi1 | gi2 |
| 0 | 3 | -3 | 3604 | 1204 | -1200 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,0016638919752473356" | 1204 | -1200 |
| 1 | 0,1706 | -0,18 | 12,97994 | 72,46274 | -74,1082 | -0,00235 | 2,8294 | 2,82 | 3591,02 | 0,015578549011534113" | 68,4612 | -70,12 |
| 2 | 0,00031256 | -0,005845621 | 1,003167 | -0,76774 | -1,23164 | -0,00235 | 0,170287 | 0,174154 | 11,97677 | 0,6108290849775809" | -0,76774 | -1,23164 |
| 3 | 0,03676524 | 0,052633184 | 0,953 | -18,2516 | -17,9246 | -0,04748 | 0,036453 | 0,058479 | 0,050167 | 2,956887098313727" | -5,10006 | 3,173589 |
| 4 | 1,00110953 | 0,99970128 | 0,0002 | 0,283869 | -0,28165 | -0,05284 | 0,964344 | 0,947068 | 0,952801 | 1,5661685721268461" | 0,283869 | -0,28165 |
| 5 | 1,000442438 | 1,000363158 | 8,24E-07 | 0,017685 | -0,01679 | -0,00235 | 0,000667 | 0,000662 | 0,000199 | 1,5448829744144432" | 0,016741 | -0,01586 |
| 6 | 1,000400879 | 1,00040262 | 1,61E-07 | 0,000454 | 0,000348 | -0,00235 | 4,16E-05 | 3,95E-05 | 6,63E-07 | 0,13052339023200682" | 0,000454 | 0,000348 |

* + 1. **Функция Розенброка**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| i | xi | yi | f(x, y) | si1 | si2 | lambdai | |yi-y(i-1)| | |yi-y(i-1)| | |fi-f(i-1)| | angle((xi, yi), si)" | gi1 | gi2 |
| 0 | 3 | -3 | 14404 | 14404 | -2400 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,6202945188567891" | 14404 | -2400 |
| 1 | 1,399556 | -2,73333 | 2201,73 | 3153,381 | -1026,03 | -0,00011 | 1,600444 | 0,266667 | 12202,27 | 0,7829971579917454" | 2627,535 | -938,418 |
| 2 | -0,7027 | -2,04931 | 649,6326 | -718,217 | -508,619 | -0,00067 | 2,102254 | 0,684023 | 1552,097 | 0,6242774987335835" | -718,217 | -508,619 |
| 3 | 0,374627 | -1,28638 | 203,9461 | 95,15218 | -368,48 | -0,0015 | 1,077326 | 0,762929 | 445,6865 | 0,030678947968208633" | 212,5456 | -285,345 |
| 4 | 0,056462 | -0,05428 | 1,220491 | -0,58923 | -11,4931 | -0,00334 | 0,318165 | 1,232104 | 202,7257 | 0,8563466961705548" | -0,58923 | -11,4931 |
| 5 | 0,059413 | 0,003281 | 0,88471 | -1,89093 | -0,35508 | -0,00501 | 0,002951 | 0,057559 | 0,335781 | 3,01115008330035" | -1,87527 | -0,04969 |
| 6 | 0,25125 | 0,039305 | 0,617375 | 0,896622 | -4,76442 | -0,10145 | 0,191837 | 0,036023 | 0,267335 | 1,5399589398663636" | 0,896622 | -4,76442 |
| 7 | 0,24744 | 0,059553 | 0,566627 | -1,26681 | -0,72103 | -0,00425 | 0,003811 | 0,020249 | 0,050748 | 2,860341243262149" | -1,33954 | -0,3346 |
| 8 | 0,426282 | 0,161344 | 0,370655 | 2,326278 | -4,07443 | -0,14117 | 0,178842 | 0,101791 | 0,195972 | 1,4138429129170191" | 2,326278 | -4,07443 |
| 9 | 0,419703 | 0,172867 | 0,337823 | -0,52455 | -0,80524 | -0,00283 | 0,006579 | 0,011523 | 0,032832 | 2,5388812395676035" | -0,60937 | -0,65668 |
| 10 | 0,437052 | 0,199499 | 0,32411 | -2,60922 | 1,69696 | -0,03307 | 0,017349 | 0,026632 | 0,013713 | 2,1367385521461024" | -2,60922 | 1,69696 |
| 11 | 0,444431 | 0,1947 | 0,309452 | -0,79582 | -0,44295 | -0,00283 | 0,007379 | 0,004799 | 0,014658 | 3,046606764084174" | -0,60999 | -0,56381 |
| 12 | 0,473752 | 0,21102 | 0,29495 | 1,490858 | -2,68427 | -0,03684 | 0,029321 | 0,01632 | 0,014502 | 1,482852564638558" | 1,490858 | -2,68427 |
| 13 | 0,469536 | 0,218611 | 0,281736 | -0,61088 | -0,55435 | -0,00283 | 0,004216 | 0,007591 | 0,013215 | 2,840407227143663" | -0,71297 | -0,37054 |
| 14 | 0,577864 | 0,316916 | 0,207136 | 3,087726 | -3,40218 | -0,17733 | 0,108329 | 0,098305 | 0,0746 | 1,3354476671842337" | 3,087726 | -3,40218 |
| 15 | 0,570608 | 0,324912 | 0,184424 | -0,62803 | -0,21912 | -0,00235 | 0,007256 | 0,007995 | 0,022712 | 2,959666292376932" | -0,70306 | -0,13646 |
| 16 | 0,576274 | 0,326888 | 0,182251 | 0,351969 | -1,04067 | -0,00902 | 0,005666 | 0,001977 | 0,002173 | 1,7606456832732593" | 0,351969 | -1,04067 |
| 17 | 0,575279 | 0,329831 | 0,180512 | -0,47605 | -0,56892 | -0,00283 | 0,000995 | 0,002943 | 0,001739 | 2,788134301268306" | -0,59311 | -0,22279 |
| 18 | 0,709079 | 0,489737 | 0,101682 | 3,121376 | -2,61129 | -0,28107 | 0,133801 | 0,159906 | 0,078831 | 1,3010863368334984" | 3,121376 | -2,61129 |
| 19 | 0,704397 | 0,493654 | 0,088017 | 0,169865 | -0,54664 | -0,0015 | 0,004682 | 0,003917 | 0,013665 | 1,8807887267256485" | 0,119253 | -0,5043 |
| 20 | 0,703998 | 0,494939 | 0,087663 | -0,40201 | -0,13494 | -0,00235 | 0,000399 | 0,001285 | 0,000354 | 2,8526726066556436" | -0,40201 | -0,13494 |
| 21 | 0,70587 | 0,495567 | 0,087234 | -0,53952 | -0,77524 | -0,00466 | 0,001872 | 0,000628 | 0,000429 | 2,790901569527316" | 0,169975 | -0,53709 |
| 22 | 0,808415 | 0,642914 | 0,047983 | 3,050911 | -2,12396 | -0,19007 | 0,102545 | 0,147348 | 0,039251 | 1,280007694830577" | 3,050911 | -2,12396 |
| 23 | 0,803838 | 0,6461 | 0,03848 | -0,34346 | -0,03269 | -0,0015 | 0,004576 | 0,003186 | 0,009503 | 2,5594465036441436" | -0,37445 | -0,01112 |
| 24 | 0,804645 | 0,646177 | 0,038327 | 0,020321 | -0,25541 | -0,00235 | 0,000807 | 7,68E-05 | 0,000153 | 2,1680040447730304" | 0,020321 | -0,25541 |
| 25 | 0,804569 | 0,647135 | 0,038197 | -0,29388 | -0,46284 | -0,00375 | 7,62E-05 | 0,000958 | 0,000129 | 2,8138954167225507" | -0,32758 | -0,03933 |
| 26 | 0,873678 | 0,755976 | 0,021342 | 2,311785 | -1,4676 | -0,23516 | 0,069109 | 0,108841 | 0,016855 | 1,2789390897879747" | 2,311785 | -1,4676 |
| 27 | 0,871182 | 0,757561 | 0,016789 | 0,269255 | -0,30485 | -0,00108 | 0,002497 | 0,001585 | 0,004553 | 1,5630718102313572" | 0,229029 | -0,27931 |
| 28 | 0,870891 | 0,75789 | 0,016701 | -0,06288 | -0,11215 | -0,00108 | 0,000291 | 0,000329 | 8,86E-05 | 2,797933989767279" | -0,06288 | -0,11215 |
| 29 | 0,952865 | 0,904095 | 0,003709 | -8,08637 | -17,6474 | -1,30367 | 0,081974 | 0,146205 | 0,012991 | 2,7596035975533137" | 1,375725 | -0,77136 |
| 30 | 0,971868 | 0,945566 | 0,000899 | -0,46021 | 0,207819 | -0,00235 | 0,019003 | 0,041472 | 0,00281 | 1,9457477781365775" | -0,46021 | 0,207819 |
| 31 | 0,972365 | 0,945342 | 0,000766 | 0,002041 | -0,02958 | -0,00108 | 0,000497 | 0,000224 | 0,000133 | 2,2732119668595248" | 0,003727 | -0,03034 |
| 32 | 0,972356 | 0,945468 | 0,000764 | -0,05174 | -0,00182 | -0,00425 | 8,67E-06 | 0,000126 | 1,81E-06 | 2,405459646812532" | -0,05174 | -0,00182 |
| 33 | 0,972434 | 0,94547 | 0,000762 | -0,01376 | -0,03216 | -0,0015 | 7,76E-05 | 2,74E-06 | 1,82E-06 | 2,7463528559370283" | 0,006061 | -0,03146 |
| 34 | 0,974516 | 0,950339 | 0,000692 | -0,30683 | 0,131277 | -0,15136 | 0,002082 | 0,004868 | 6,99E-05 | 1,9644735811167877" | -0,30683 | 0,131277 |
| 35 | 0,974848 | 0,950197 | 0,000634 | -0,00098 | -0,02546 | -0,00108 | 0,000331 | 0,000142 | 5,81E-05 | 2,381976107395055" | 0,000921 | -0,02627 |
| 36 | 0,974854 | 0,950353 | 0,000632 | -0,05553 | 0,002688 | -0,00615 | 6,05E-06 | 0,000157 | 2,01E-06 | 2,32055258094778" | -0,05553 | 0,002688 |
| 37 | 0,974914 | 0,95035 | 0,00063 | -0,01817 | -0,02082 | -0,00108 | 6E-05 | 2,9E-06 | 1,9E-06 | 3,0608985366660644" | -0,00868 | -0,02128 |
| 38 | 0,975168 | 0,950642 | 0,000626 | 0,071522 | -0,06214 | -0,01398 | 0,000254 | 0,000291 | 4,16E-06 | 1,48795467546479" | 0,071522 | -0,06214 |
| 39 | 0,975091 | 0,950709 | 0,000621 | -0,00935 | -0,02225 | -0,00108 | 7,72E-05 | 6,71E-05 | 4,95E-06 | 2,7414357441665578" | -0,01357 | -0,01859 |
| 40 | 0,976592 | 0,954281 | 0,000578 | -0,26122 | 0,109771 | -0,16053 | 0,001501 | 0,003572 | 4,33E-05 | 1,969928554139008" | -0,26122 | 0,109771 |
| 41 | 0,976874 | 0,954162 | 0,000536 | -0,00095 | -0,02336 | -0,00108 | 0,000282 | 0,000119 | 4,18E-05 | 2,3850901472392176" | 0,000952 | -0,02416 |
| 42 | 0,97688 | 0,954306 | 0,000535 | -0,05072 | 0,002294 | -0,00615 | 5,85E-06 | 0,000144 | 1,72E-06 | 2,3226900368630004" | -0,05072 | 0,002294 |
| 43 | 0,976935 | 0,954304 | 0,000533 | -0,01659 | -0,01921 | -0,00108 | 5,48E-05 | 2,48E-06 | 1,58E-06 | 3,056725794543317" | -0,00782 | -0,01961 |
| 44 | 0,977174 | 0,954581 | 0,000529 | 0,067116 | -0,0577 | -0,01443 | 0,000239 | 0,000277 | 3,62E-06 | 1,4838118239802047" | 0,067116 | -0,0577 |
| 45 | 0,977102 | 0,954643 | 0,000525 | -0,00892 | -0,02021 | -0,00108 | 7,25E-05 | 6,23E-05 | 4,29E-06 | 2,760008661989359" | -0,01276 | -0,01691 |
| 46 | 0,979517 | 0,960119 | 0,000464 | -0,30159 | 0,133037 | -0,27095 | 0,002416 | 0,005476 | 6,13E-05 | 1,9507509468909126" | -0,30159 | 0,133037 |
| 47 | 0,979843 | 0,959975 | 0,000408 | 0,003828 | -0,02264 | -0,00108 | 0,000326 | 0,000144 | 5,61E-05 | 2,1784175396506935" | 0,005422 | -0,02334 |
| 48 | 0,979832 | 0,960039 | 0,000407 | -0,02801 | -0,00629 | -0,00283 | 1,08E-05 | 6,4E-05 | 8,26E-07 | 2,587391976693573" | -0,02801 | -0,00629 |
| 49 | 0,979886 | 0,960051 | 0,000406 | -0,01505 | -0,03028 | -0,00192 | 5,38E-05 | 1,21E-05 | 7,09E-07 | 2,807152551183881" | 0,00867 | -0,02495 |
| 50 | 0,999278 | 0,999076 | 2,75E-05 | -0,20912 | 0,103912 | -1,28881 | 0,019392 | 0,039024 | 0,000379 | 1,8951266029437075" | -0,20912 | 0,103912 |
| 51 | 0,999504 | 0,998964 | 4,41E-07 | 0,015274 | -0,00814 | -0,00108 | 0,000226 | 0,000112 | 2,71E-05 | 1,2748687994650614" | 0,016633 | -0,00882 |
| 52 | 0,999487 | 0,998972 | 2,63E-07 | -9,9E-05 | -0,00046 | -0,00108 | 1,65E-05 | 8,79E-06 | 1,77E-07 | 2,56626495869736" | -9,9E-05 | -0,00046 |

* + 1. **Функция из варианта (поиск максимума)**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| i | xi | yi | f(x, y) | si1 | si2 | lambdai | |yi-y(i-1)| | |yi-y(i-1)| | |fi-f(i-1)| | angle((xi, yi), si)" | gi1 | gi2 |
| 0 | 3 | -3 | 0,000331 | 671,1856 | -9056,86 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,7114253932326264" | 671,1856 | -9056,86 |
| 1 | 2,463052 | 4,245487 | 1,987733 | 0,051773 | 0,313329 | -0,0008 | 0,536948 | 7,245487 | 3017,193 | 0,36194438688258684" | 0,051773 | 0,31334 |
| 2 | 2,237182 | 2,878545 | 3,01035 | 0,020008 | -0,00331 | -4,36265 | 0,225869 | 1,366942 | 0,170898 | 1,074263524349068" | 0,020008 | -0,00331 |
| 3 | 1,979319 | 2,921256 | 3,034459 | 0,00123 | 0,003466 | -12,8883 | 0,257863 | 0,042711 | 0,002639 | 0,25453450527061455" | 0,000592 | 0,003571 |
| 4 | 1,966868 | 2,886164 | 3,035063 | -2,1E-05 | 7,61E-06 | -10,1252 | 0,012452 | 0,035092 | 6,56E-05 | 1,8257789733903813" | -2,1E-05 | 7,61E-06 |

* 1. **Метод Бройдена (переменной метрики)**
     1. **Квадратичная функция**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| i | xi | yi | f(x, y) | si1 | si2 | lambdai | |yi-y(i-1)| | |yi-y(i-1)| | |fi-f(i-1)| | angle((xi, yi), si) | gi1 | gi2 | etai11 | etai12 | etai21 | etai22 |
| 0 | 3,000 | -3,000 | 3604,000 | 1204,000 | -1200,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,002 | 1204,000 | -1200,000 | 1,000 | 0,000 | 0,000 | 1,000 |
| 1 | 0,171 | -0,180 | 12,980 | 1204,000 | -1200,000 | -0,002 | 2,829 | 2,820 | 3591,020 | 0,028 | 68,461 | -70,120 | 0,499 | 0,499 | 0,499 | 0,504 |
| 2 | 0,997 | 0,997 | 0,000 | -0,827 | -1,177 | -1,000 | 0,827 | 1,177 | 12,980 | 2,968 | 0,003 | -0,008 | 1,000 | 0,000 | 0,000 | 1,000 |
| 3 | 0,997 | 0,997 | 0,000 | 0,003 | -0,008 | -0,003 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 1,989 | -0,003 | -0,002 | 0,499 | 0,499 | 0,499 | 0,504 |
| 4 | 1,000 | 1,000 | 0,000 | -0,003 | -0,003 | -1,002 | 0,003 | 0,003 | 0,000 | 3,140 | 0,000 | 0,000 | 1,000 | 0,000 | 0,000 | 1,000 |

* + 1. **Функция Розенброка**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| i | xi | yi | f(x, y) | si1 | si2 | lambdai | |yi-y(i-1)| | |yi-y(i-1)| | |fi-f(i-1)| | angle((xi, yi), si) | gi1 | gi2 | etai11 | etai12 | etai21 | etai22 |
| 0 | 3,000 | -3,000 | 14404,000 | 14404,000 | -2400,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,620 | 14404,000 | -2400,000 | 1,000 | 0,000 | 0,000 | 1,000 |
| 1 | 1,400 | -2,733 | 2201,730 | 14404,000 | -2400,000 | 0,000 | 1,600 | 0,267 | 12202,270 | 0,932 | 2627,535 | -938,418 | 0,015 | 0,122 | 0,122 | 0,985 |
| 2 | 2,506 | 6,229 | 2,542 | -74,471 | -603,086 | -0,015 | 1,107 | 8,962 | 2199,187 | 2,882 | 55,456 | -10,463 | 1,000 | 0,000 | 0,000 | 1,000 |
| 3 | 2,500 | 6,230 | 2,291 | 55,456 | -10,463 | 0,000 | 0,006 | 0,001 | 0,251 | 1,376 | 23,303 | -4,060 | 0,038 | 0,191 | 0,191 | 0,962 |
| 4 | 2,249 | 5,019 | 1,708 | 0,115 | 0,557 | -2,176 | 0,251 | 1,211 | 0,583 | 0,217 | 37,176 | -7,710 | 1,000 | 0,000 | 0,000 | 1,000 |
| 5 | 2,245 | 5,020 | 1,586 | 37,176 | -7,710 | 0,000 | 0,004 | 0,001 | 0,122 | 1,355 | 19,669 | -3,827 | 0,047 | 0,211 | 0,211 | 0,953 |
| 6 | 2,014 | 4,021 | 1,144 | 0,118 | 0,510 | -1,958 | 0,231 | 0,999 | 0,441 | 0,237 | 29,580 | -6,842 | 1,000 | 0,000 | 0,000 | 1,000 |
| 7 | 2,010 | 4,021 | 1,062 | 29,580 | -6,842 | 0,000 | 0,003 | 0,001 | 0,083 | 1,334 | 18,282 | -4,044 | 0,058 | 0,233 | 0,233 | 0,942 |
| 8 | 1,792 | 3,181 | 0,717 | 0,118 | 0,453 | -1,856 | 0,218 | 0,840 | 0,344 | 0,259 | 23,127 | -6,011 | 1,000 | 0,000 | 0,000 | 1,000 |
| 9 | 1,789 | 3,181 | 0,664 | 23,127 | -6,011 | 0,000 | 0,003 | 0,001 | 0,054 | 1,313 | 16,027 | -4,037 | 0,072 | 0,258 | 0,258 | 0,928 |
| 10 | 1,586 | 2,490 | 0,408 | 0,114 | 0,387 | -1,788 | 0,203 | 0,692 | 0,255 | 0,281 | 17,359 | -5,104 | 1,000 | 0,000 | 0,000 | 1,000 |
| 11 | 1,574 | 2,493 | 0,351 | 17,359 | -5,104 | -0,001 | 0,012 | 0,003 | 0,058 | 1,293 | -7,956 | 2,892 | 0,091 | 0,287 | 0,287 | 0,909 |
| 12 | 1,464 | 2,131 | 0,232 | 0,105 | 0,346 | -1,047 | 0,110 | 0,362 | 0,118 | 0,307 | 8,510 | -2,589 | 1,000 | 0,000 | 0,000 | 1,000 |
| 13 | 1,461 | 2,132 | 0,214 | 8,510 | -2,589 | 0,000 | 0,003 | 0,001 | 0,019 | 1,265 | 2,705 | -0,610 | 0,105 | 0,305 | 0,305 | 0,896 |
| 14 | 1,333 | 1,761 | 0,133 | 0,097 | 0,279 | -1,327 | 0,128 | 0,371 | 0,080 | 0,314 | 8,671 | -3,003 | 1,000 | 0,000 | 0,000 | 1,000 |
| 15 | 1,326 | 1,764 | 0,110 | 8,671 | -3,003 | -0,001 | 0,007 | 0,002 | 0,024 | 1,260 | -2,441 | 1,166 | 0,124 | 0,329 | 0,329 | 0,877 |
| 16 | 1,234 | 1,514 | 0,063 | 0,081 | 0,220 | -1,135 | 0,092 | 0,250 | 0,046 | 0,332 | 4,994 | -1,833 | 1,000 | 0,000 | 0,000 | 1,000 |
| 17 | 1,230 | 1,516 | 0,053 | 4,994 | -1,833 | -0,001 | 0,004 | 0,001 | 0,010 | 1,241 | -0,596 | 0,429 | 0,141 | 0,348 | 0,348 | 0,859 |
| 18 | 1,147 | 1,307 | 0,027 | 0,065 | 0,162 | -1,288 | 0,084 | 0,208 | 0,027 | 0,338 | 3,690 | -1,482 | 1,000 | 0,000 | 0,000 | 1,000 |
| 19 | 1,144 | 1,308 | 0,021 | 3,690 | -1,482 | -0,001 | 0,003 | 0,001 | 0,006 | 1,234 | 0,041 | 0,108 | 0,160 | 0,366 | 0,366 | 0,841 |
| 20 | 1,074 | 1,148 | 0,008 | 0,046 | 0,105 | -1,517 | 0,070 | 0,160 | 0,013 | 0,341 | 2,282 | -0,993 | 1,000 | 0,000 | 0,000 | 1,000 |
| 21 | 1,072 | 1,149 | 0,005 | 2,282 | -0,993 | -0,001 | 0,002 | 0,001 | 0,003 | 1,231 | 0,254 | -0,051 | 0,178 | 0,382 | 0,382 | 0,823 |
| 22 | 1,020 | 1,039 | 0,001 | 0,026 | 0,055 | -2,009 | 0,052 | 0,110 | 0,004 | 0,338 | 0,961 | -0,451 | 1,000 | 0,000 | 0,000 | 1,000 |
| 23 | 1,019 | 1,039 | 0,000 | 0,961 | -0,451 | -0,001 | 0,001 | 0,000 | 0,001 | 1,234 | -0,104 | 0,070 | 0,194 | 0,394 | 0,394 | 0,807 |
| 24 | 1,004 | 1,007 | 0,000 | 0,007 | 0,015 | -2,070 | 0,015 | 0,032 | 0,000 | 0,336 | 0,225 | -0,108 | 1,000 | 0,000 | 0,000 | 1,000 |
| 25 | 1,004 | 1,007 | 0,000 | 0,225 | -0,108 | -0,001 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 1,235 | -0,018 | 0,013 | 0,199 | 0,398 | 0,398 | 0,802 |
| 26 | 1,000 | 1,001 | 0,000 | 0,001 | 0,003 | -2,307 | 0,003 | 0,007 | 0,000 | 0,331 | 0,031 | -0,015 | 1,000 | 0,000 | 0,000 | 1,000 |
| 27 | 1,000 | 1,001 | 0,000 | 0,031 | -0,015 | -0,001 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 1,240 | -0,002 | 0,002 | 0,200 | 0,399 | 0,399 | 0,801 |
| 28 | 1,000 | 1,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | -2,184 | 0,000 | 0,001 | 0,000 | 0,333 | 0,003 | -0,001 | 1,000 | 0,000 | 0,000 | 1,000 |
| 29 | 1,000 | 1,000 | 0,000 | 0,003 | -0,001 | -0,001 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 1,238 | 0,000 | 0,000 | 0,200 | 0,399 | 0,399 | 0,801 |

* + 1. **Функция из варианта (поиск максимума)**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| i | xi | yi | f(x, y) | si1 | si2 | lambdai | |yi-y(i-1)| | |yi-y(i-1)| | |fi-f(i-1)| | angle((xi, yi), si) | gi1 | gi2 | etai11 | etai12 | etai21 | etai22 |
| 0 | 3,000 | -3,000 | 0,000 | 671,186 | -9056,858 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,711 | 671,186 | -9056,858 | 1,000 | 0,000 | 0,000 | 1,000 |
| 1 | 2,463 | 4,245 | 1,988 | 671,186 | -9056,858 | -0,001 | 0,537 | 7,245 | 3017,193 | 2,542 | 0,052 | 0,313 | 0,995 | 0,074 | 0,074 | 0,006 |
| 2 | 1,792 | 4,194 | 2,091 | 0,075 | 0,006 | -9,000 | 0,671 | 0,052 | 0,025 | 1,090 | -0,022 | 0,285 | 1,000 | 0,000 | 0,000 | 1,000 |
| 3 | 1,894 | 2,875 | 3,033 | -0,022 | 0,285 | -4,618 | 0,102 | 1,318 | 0,149 | 0,660 | -0,005 | 0,000 | 1,024 | -0,297 | -0,297 | 4,594 |
| 4 | 1,967 | 2,879 | 3,035 | -0,005 | 0,000 | -13,775 | 0,073 | 0,004 | 0,000 | 2,226 | 0,000 | -0,001 | 1,000 | 0,000 | 0,000 | 1,000 |

1. **Текст программы**

**descent\_methods.rs**

use nalgebra::allocator::Allocator;

use nalgebra::DefaultAllocator;

use nalgebra::DimName;

use nalgebra::VectorN;

use super::one\_dimension\_searchers::minimize;

pub fn conjugate\_gradients<D>(

    f: &dyn Fn(&VectorN<f64, D>) -> f64,

    df: &dyn Fn(&VectorN<f64, D>) -> VectorN<f64, D>,

    mut x: VectorN<f64, D>,

    eps: f64,

    rev: bool,

) -> (VectorN<f64, D>, i32, i32, String)

where

    D: DimName,

    DefaultAllocator: Allocator<f64, D>,

{

    let mut iter = 0;

    let mut func\_calls = 1;

    let mut result = String::new();

    let precision = -eps.log10().round() as usize;

    result.push\_str(&format!("\"{}\";\"{}\";\"{}\";\"{}\";\"{}\";\"{}\";\"{}\";\"{}\";\"{}\";\"{}\";\"{}\";\"{}\";\"{}\";\n",

"i", "xi", "yi", "f(x, y)", "si1", "si2", "lambdai", "|yi-y(i-1)|", "|yi-y(i-1)|", "|fi-f(i-1)|",

"angle((xi, yi), si)", "gi1", "gi2"));

    let mut g = df(&x);

    #[allow(non\_snake\_case)]

    let mut S = g.clone();

    result.push\_str(&format!("\"{}\";\"{}\";\"{}\";\"{}\";\"{}\";\"{}\";\"{}\";\"{}\";\"{}\";\"{}\";\"{}\";\"{}\";\"{}\";\n",

    iter,

    x[0],

    x[1],

    if rev { 1./ f(&x) } else {f(&x)},

    S[0],

    S[1],

    0,

    0,

    0,

    0,

    x.angle(&S),

    g[0],

    g[1]));

    loop {

        let (lambda, search\_func\_calls) =

            minimize(&|lambda: f64| -> f64 { f(&(&x + lambda \* &S)) }, 0., eps);

        let dx = &(lambda \* &S);

        x += dx;

        iter += 1;

        func\_calls += search\_func\_calls;

        let \_g = g;

        g = df(&x);

        func\_calls += 1;

        if iter % D::dim() as i32 == 0 {

            S = g.clone();

        } else {

            S = g.clone() + (g.norm() / \_g.norm()).powi(2) \* S;

        }

        result.push\_str(&format!("\"{}\";\"{}\";\"{}\";\"{}\";\"{}\";\"{}\";\"{}\";\"{}\";\"{}\";\"{}\";\"{}\";\"{}\";\"{}\";\n",

        iter,

        x[0],

        x[1],

        if rev { 1./ f(&x) } else {f(&x)},

        S[0],

        S[1],

        lambda,

        dx[0].abs(),

        dx[1].abs(),

        (f(&x) - f(&(&x - dx))).abs(),

        x.angle(&S),

        g[0],

        g[1]));

        if S.norm() < eps {

            return (x, func\_calls, iter, result);

        }

    }

}

**variable\_metric\_methods.rs**

use nalgebra::allocator::Allocator;

use nalgebra::DefaultAllocator;

use nalgebra::DimName;

use nalgebra::MatrixN;

use nalgebra::VectorN;

use super::one\_dimension\_searchers::minimize;

pub fn broyden<D>(

    f: &dyn Fn(&VectorN<f64, D>) -> f64,

    df: &dyn Fn(&VectorN<f64, D>) -> VectorN<f64, D>,

    mut x: VectorN<f64, D>,

    eps: f64,

    rev: bool,

) -> (VectorN<f64, D>, i32, i32, String)

where

    D: DimName,

    DefaultAllocator: Allocator<f64, D> + Allocator<f64, D, D> + Allocator<f64, nalgebra::U1, D>,

{

    let mut iter = 0;

    let mut func\_calls = 1;

    let mut result = String::new();

    let precision = -eps.log10().round() as usize;

    result.push\_str(&format!("\"{}\";\"{}\";\"{}\";\"{}\";\"{}\";\"{}\";\"{}\";\"{}\";\"{}\";\"{}\";\"{}\";\"{}\";\"{}\";\"{}\";\"{}\";\"{}\";\"{}\";\n",

        "i", "xi", "yi", "f(x, y)", "si1", "si2", "lambdai", "|yi-y(i-1)|", "|yi-y(i-1)|", "|fi-f(i-1)|",

"angle((xi, yi), si)", "gi1", "gi2", "etai11", "etai12", "etai21", "etai22"));

    let mut g = df(&x);

    let mut eta = MatrixN::<f64, D>::from\_diagonal\_element(1.);

    result.push\_str(&format!("\"{}\";\"{}\";\"{}\";\"{}\";\"{}\";\"{}\";\"{}\";\"{}\";\"{}\";\"{}\";\"{}\";\"{}\";\"{}\";\"{}\";\"{}\";\"{}\";\"{}\";\n",

    iter,

    x[0],

    x[1],

    if rev { 1./ f(&x) } else {f(&x)},

    (&eta \* &g)[0],

    (&eta \* &g)[1],

    0,

    0,

    0,

    0,

    x.angle(&(&eta \* &g)),

    g[0],

    g[1],

    eta[(0, 0)],

    eta[(0, 1)],

    eta[(1, 0)],

    eta[(1, 1)]));

    loop {

        #[allow(non\_snake\_case)]

        let S = &eta \* &g;

        let (lambda, search\_func\_calls) =

            minimize(&|lambda: f64| -> f64 { f(&(&x + lambda \* &S)) }, 0., eps);

        let dx = &(lambda \* &S);

        x += dx;

        iter += 1;

        func\_calls += search\_func\_calls;

        let dg = &(df(&x) - &g);

        g += dg;

        func\_calls += 1;

        if iter % D::dim() as i32 == 0 {

            eta = MatrixN::<f64, D>::from\_diagonal\_element(1.);

        } else {

            let dx\_eta\_dg = &(dx - &eta \* dg);

            eta += dx\_eta\_dg \* dx\_eta\_dg.transpose() / dx\_eta\_dg.dot(dg);

        }

        result.push\_str(&format!("\"{}\";\"{}\";\"{}\";\"{}\";\"{}\";\"{}\";\"{}\";\"{}\";\"{}\";\"{}\";\"{}\";\"{}\";\"{}\";\"{}\";\"{}\";\"{}\";\"{}\";\n",

        iter,

        x[0],

        x[1],

        if rev { 1./ f(&x) } else {f(&x)},

        S[0],

        S[1],

        lambda,

        dx[0].abs(),

        dx[1].abs(),

        (f(&x) - f(&(&x - dx))).abs(),

        x.angle(&S),

        g[0],

        g[1],

        eta[(0, 0)],

        eta[(0, 1)],

        eta[(1, 0)],

        eta[(1, 1)]));

        if g.norm() < eps {

            return (x, func\_calls, iter, result);

        }

    }

}

1. **Выводы**

В случае квадратичной функции разница между методами сопряжённых градиентов и переменной метрики не сильно различна, а выбор начального приближения слабо влияет на сходимость. Сходимость быстрая, но из-за решения задачи минимизации, количество вызовов функции достаточно велико. На сходимость может сильно повлиять точность: например, при использовании сопряжённых градиентов в модификации Флетчера-Ривса с точностью   
10-5 было больше итераций, чем при других точностях. Причиной этого может быть неоптимальное решение задачи одномерной минимизации при заданной точности.

В случае функции Розенброка сходимость гораздо хуже, а выбор начально точки гораздо из-за наличия нескольких точек локального экстремума. При использовании сопряжённых градиентов в модификации Флетчера-Ривса точность сильно влияет на сходимость: бόльшая обеспечивает более оптимальное решение задачи одномерной минимизации и, как следствие, меньшее количество итераций. Метод Бройдена показал более хорошую сходимость.

В случае функции из варианта методы показали почти одинаковую, хорошую сходимость при любой точности. Оба метода нашли одинаковый экстремум, но при этом выбор начального приближения оказался критичным: для разных начальных приближений были получены разные результаты. Это связано с наличием нескольких экстремумов у функции.